

Olimpiada Națională de Matematică, etapa locală (OLM), Caraș – Severin, 10.02.2024

Clasa a VII-a

Barem de evaluare și notare.

(Orice soluție corectă se punctează la maxim)

1. Un triplet (x, y, z) de numere raționale se numește *deosebit* dacă $xy + yz + zx = 1$.
- a) Determinați perechile (y, z) de numere naturale pentru care tripletul $(1, y, z)$ este *deosebit*.
- b) Arătați că, dacă (x, y, z) este un triplet *deosebit*, atunci numărul:

$$\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} \text{ este număr rațional.}$$

Soluție:

a) Determinarea perechilor (y, z) de numere naturale	3p
b) $1 + x^2 = xy + yz + xz + x^2 = (x + y)(x + z)$	2p
Analog $1 + y^2 = (y + z)(x + y)$ și $1 + z^2 = (y + z)(x + z)$	1p
$\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)(1+z^2)} = \sqrt{(x+y)^2 (y+z)^2 (x+z)^2} = x+y \cdot y+z \cdot x+z \in \mathbb{Q}$	1p

2. Determinați $\overline{aba} \in \mathbb{N}$ cu proprietatea $\sqrt{\overline{aba}} = \frac{a^2}{3} + 2b$.

SGM 10/2023

Soluție:

Din condiție $\Rightarrow \sqrt{\overline{aba}} \in \mathbb{Q}$, deci $a \in \{1, 4, 5, 6, 9\}$	2p
Din $\overline{aba} \in \mathbb{N}$ avem $\frac{a^2}{3} + 2b$ natural, deci $a^2 : 3$, deci a poate fi 6 sau 9	2p
Pentru $a = 6 \Rightarrow b = 7$, deci numărul este 676	2p



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



Pentru $a = 9$ nu sunt soluții

1p

3. Fie $ABCD$ un paralelogram cu $AC \cap BD = \{O\}$ și punctele $M \in (AB), N \in (BC)$.

Punctele P și Q sunt simetricele punctului O față de punctele M , respectiv N . Știind că punctele P și Q aparțin dreptelor AD , respectiv CD , demonstrați că:

- O este centrul de greutate al $\triangle DPQ$;
- $OPBQ$ este paralelogram.

G.M.10/2023

Soluție:

a) Dacă not. $OQ \cap AD = \{E\}$ și dem. că $\triangle CON \equiv \triangle AOE$ (U.L.U) $\Rightarrow ON \equiv OE$, deci $OE = \frac{1}{3} \cdot QE$	2p
Dacă not. $OP \cap DC = \{F\}$ și dem. că $\triangle COF \equiv \triangle AOM$ (U.L.U) $\Rightarrow OF \equiv OM$, deci $OF = \frac{1}{3} \cdot PF$	1p
Deducem că (PF) și (QE) sunt mediane în $\triangle DPQ$ și finalizăm	2p
b) Cum (OE) e linie mijlocie în $\triangle DPB \Rightarrow$ $OE \parallel PB$, deci $OQ \parallel PB$	1p
și $PB = 2OE = OQ$, deci $OPBQ$ este paralelogram	1p

4. Un triunghi ABC are măsura unghiului A de 60° și n este un număr natural nenul.

A_1, A_2, \dots, A_n sunt puncte în interiorul triunghiului ABC astfel încât $\sphericalangle ABA_1 \equiv \sphericalangle A_1BA_2 \equiv \dots \equiv \sphericalangle A_nBC$ respectiv $\sphericalangle ACA_1 \equiv \sphericalangle A_1CA_2 \equiv \dots \equiv \sphericalangle A_nCB$.

- Pentru $n = 2$ determinați măsura unghiului BA_1C ;
- Arată că pentru $n = 2023$, măsura unghiului $BAA_{1012} = 30^\circ$.

Soluție:

a) Pentru $n = 2$ avem $\sphericalangle ABA_1 = \sphericalangle A_1BA_2 = \sphericalangle A_2BC = b$ și $\sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle A_1CA_2 = \sphericalangle A_2CB = c$. Din $\triangle ABC$ se obține $b + c = 40^\circ \Rightarrow 2b + 2c = 80^\circ$. Din $\triangle BA_1C$ se obține $\sphericalangle BA_1C = 100^\circ$.	3p
---	----



MINISTERUL EDUCAȚIEI

Societatea de Științe Matematice din România,
Filiala Caraș - Severin



<p>b) Pentru orice $n = 2k + 1$ avem $\sphericalangle ABA_1 = \sphericalangle A_1BA_2 = \dots = \sphericalangle A_{2k+1}BC = (2k + 2) \cdot b$ de unde rezultă că $\sphericalangle ABA_{k+1} = \sphericalangle A_{k+1}BC = (k + 1)b$, deci BA_{k+1} este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ACA_1 = \sphericalangle A_1CA_2 = \dots = \sphericalangle A_{2k+1}CB = (2k + 2) \cdot c \Rightarrow CA_{k+1}$ este bisectoarea unghiului $\sphericalangle ACB$.</p>	3p
<p>Deci și AA_{k+1} este bisectoarea unghiului $BAC \Rightarrow \sphericalangle BAA_{1012} = 30^0$</p>	1p